МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.В. Сидорцов, А.А. Драпеза, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

SPEED OF CONVERGENCE OF QUADRATIC HERMITE – PADÉ APPROXIMATIONS CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

M.V. Sidortsov, A.A. Drapeza, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

Найдена скорость сходимости (в том числе и недиагональных) квадратичных аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода системы $\{{}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)\}_{j=1}^2$, состоящей из двух вырожденных гипергеометрических функций, в случае, когда $\{\lambda_j\}_{j=1}^2$ – произвольные различные комплексные числа, а $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$. Доказанные теоремы дополняют и обобщают результаты, полученные ранее другими авторами.

Ключевые слова: *интегралы Эрмита*, *многочлены Эрмита – Паде*, *ряды Тейлора*, *аппроксимации Эрмита – Паде*, *асимптотические равенства.*

The speed of convergence (including non-diagonal) of quadratic Hermite – Padé approximations of the system of the second kind $\{{}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)\}_{j=1}^2$, is found. It consists of two degenerate hypergeometric functions when $\{\lambda_j\}_{j=1}^2$ are arbitrary distinct complex numbers, and $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$. These proved theorems supplement and generalize the results obtained earlier by other authors.

Keywords: *Hermite integrals*, *Hermite – Padé polynomials*, *Taylor series*, *Hermite – Padé approximations*, *asymptotic equality.*

Введение

Предполагая, что параметр $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$, рассмотрим набор целых функций

$$F_\gamma^j(z)={}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p}z^p,\ j=1,2,...,k, \tag{0.1}$$

где $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_p=\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа, не равные нулю (при $k=1$ считаем, что $\lambda_1=1$). Ряды вида (0.1) принято называть вырожденными гипергеометрическими рядами, а их суммы – вырожденными гипергеометрическими функциями. Определим вектор-функцию

$$\vec{F}_\gamma=\left\{F_\gamma^1(z),F_\gamma^2(z),...,F_\gamma^k(z)\right\}.$$

Если $\gamma=1$, то вектор $\vec{F}_1$ является упорядоченным набором экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$.

Для вектор-функции $\vec{f}=\{f_j(z)\}_{j=1}^k$ с голоморфными в нуле координатными функциями $f_j(z)$, существуют (см. [1, гл. 4, §1]) многочлены $Q_m(z)=Q_m(z;\vec{f})$, $P_{n_j}^j(z)=P_{n_j}^j(z;\vec{f})$, $j=1,2...,k$; $\deg Q_m\le m$, $\deg P_{n_j}^j\le n_j$, для которых в некоторой окрестности нуля

$$R_{n,m}^j(z)=R_{n,m}^j(z;\vec{f})==Q_m(z)f_j(z)-P_{n_j}^j(z)=A_j z^{n+m+1}+.... \tag{0.2}$$

Здесь и далее $m=\sum_{i=1}^k m_i$, $n_j=n+m-m_j$, $j=1,2,...,k$, а $n,m_1,...,m_k$ – целые неотрицательные числа. В частности, если $k=1$, то $\vec{f}$ является функцией $f(z):=f_1(z)$, соответствующие многочлены $Q_m(z)$, $P_n(z):=P_n^1(z)$ определяются с точностью до мультипликативной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z)=\pi_{n,m}(z,f)=P_n(z)/Q_m(z)$, которую называют *аппроксимацией Паде* функции f. При $k\ge 2$ дроби

$$\pi_{n_j,m}^j(z)=\pi_{n_j,m}^j(z;\vec{f})=\frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)},\ j=1,2,...,k$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае, если вектор $\vec{\pi}_{n,m}=$ $=\vec{\pi}_{n,m}(\vec{f})=\{\pi_{n_j,m}^j(z)\}_{j=1}^k$ определяется однозначно, то его координатные функции называются *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* (*совместными аппроксимациями Паде*), а многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ – *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода* для $\vec{f}=\{f_j(z)\}_{j=1}^k$. Диагональному случаю соответствует набор индексов при $n = m_1 = ... = m_k$.

Вектор $\vec{\pi}_{n,m}$ определяется единственным образом, например, для совершенных систем функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$ (см. [1, гл. 4, § 1]). В частности, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю комплексные числа, то система экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ является совершенной. Без формального определения этот факт был установлен Эрмитом [2]. При доказательстве трансцендентности числа e им, в частности, были получены интегральные представления для многочленов $Q_m(z;\vec{F}_1)$, $P_{n_j}^j(z;\vec{F}_1)$. Немного позже Паде [4, гл. 3, § 1.1] нашёл явные выражения для числителей и знаменателей дробей $\pi_{n,m}(z,f)$ в детерминантной форме. Представления Эрмита и Паде послужили отправной точкой для многих исследований (см., например, работу К. Малера [3], монографии [1], [4], [5], тематические обзоры и статьи [6]–[15]).

В данной работе при $k = 2$ получен ряд новых результатов, описывающих асимптотическое поведение аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода вектор-функции $\vec{F}_\gamma$ при произвольном комплексном $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,...\}$. Некоторые из них являются новыми и в случае, когда $\gamma = 1$, и дают ответ на следующий вопрос. Перрон [16] при $k = 1$, А.И. Аптекарев [17] при $k > 1$ показали, что при $n+m \to \infty$ дроби $\pi_{n_j,m}^j(z;\vec{F}_1)$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}$. За исключением очень частных случаев (см. [18]–[20]), до сих пор не известно, какова скорость этой сходимости.

Для $k = 1$ и $f(z) = F_\gamma(z) = {}_1F_1(1,\gamma;z)$ явные выражения для остаточной функции $R_{n,m}(z;F_\gamma)$ и знаменателя $Q_m(;,F_\gamma)$ найдены Ван Россумом [21]: при $n \ge m-1$

$$Q_m(z;F_\gamma) = {}_1F_1(-m,-n-m-\gamma;-z), \qquad (0.3)$$

$$R_{n,m}(z;F_\gamma) := Q_m(z)F_\gamma(z) - P_n(z) =$$

$$= \frac{(-1)^m m! z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} {}_1F_1(m+1, n+m+\gamma+1; z). \quad (0.4)$$

Напомним, что

$${}_1F_1(\alpha,\beta;z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p} \frac{z^p}{p!}.$$

Де Брюен [22], опираясь на равенства (0.3) и (0.4), доказал, что при $n+m \to \infty$ дроби $\pi_{n,m}(z;F_\gamma)$ равномерно сходятся к F_γ на компактах в $\mathbb{C}$. Скорость этой сходимости установлена в [23]: при $n \ge m-1$ и $n+m \to \infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z;F_\gamma) =$$

$$= (-1)^m \frac{m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1}(1+o(1)). \quad (0.5)$$

В [23] предполагается, что $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,...\}$. Однако предложенный в [23] метод доказательства позволяет обосновать равенство (0.5) и в случае, когда $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0,-1,-2,...\}$.

Здесь и далее в аналогичных равенствах предполагается, что оценка $o(1)$ равномерна по z на компактах в $\mathbb{C}$. При $\gamma = 1$ равенство (0.5) ранее было доказано Д. Браессом [24].

Многомерный случай $(k \ge 2)$ исследовался в [25]. В этой работе установлено, что при фиксированном $k \ge 1$ в предположении, что $n \ge m_j - 1$, $j = 1,...,k$, вектор-функция $\vec{\pi}_{n,m}(\vec{F}_\gamma)$ определяется однозначно, а дроби $\pi_{n_j,m}^j(z;\vec{F}_\gamma)$ при $n+m \to +\infty$ равномерно сходятся к $F_\gamma^j(z)$ на компактах в $\mathbb{C}$. Более того, при $n \ge m_j - 1$, $j = 1,2,...,k$

$$Q_m(z;\vec{F}_\gamma) =$$

$$= \frac{z^{n+m+\gamma}}{\Gamma(n+m+\gamma)} \int_0^{+\infty} \left[x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{m_i} \right] e^{-zx} dx, \quad (0.6)$$

$$R_{n,m}^j(z;\vec{F}_\gamma) =$$

$$= \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}} \int_0^{\lambda_j} \left[x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{m_i} \right] e^{-zx} dx. \quad (0.7)$$

В (1.6) $\operatorname{Re} z > 0$. В случае $\operatorname{Re} z \le 0$ значения $Q_m(z;\vec{F}_\gamma)$ определяются с помощью аналитического продолжения. В (0.7) интеграл берётся по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j. Учитывая, что подынтегральные функции в (0.6), (0.7) содержат множитель $x^{n+\gamma-1}$ считаем, что $n \ge n_0$, $n_0 = n_0(\gamma)$.

Если $\gamma \ne 1$, то, по всей видимости, условия $n \ge m_j - 1$ являются необходимыми для справедливости представлений (0.6) и (0.7). Так, в частности, уже при $k = 1$ Де Брюен [22] показал, что если $n < m-1$, то при $\gamma = 2$, $\gamma = 1 \pm i\sqrt{2}$, а также γ, являющимся действительным корнем уравнения $\gamma^3 - 4\gamma^2 - \gamma + 6 = 0$, существуют индексы (n,m), которые не являются нормальными. Хорошо известно [1, гл. 4, § 1], что единственность множества $\{\pi_{n_j,m}^j(z)\}_{j=1}^k$ является следствием нормальности индексов. В связи с этим везде в дальнейшем при $\gamma \ne 1$ предполагается, что $n \ge m_j - 1$, $j = 1,2,...,k$.

В [25] доказано асимптотическое равенство: при $n+m \to +\infty$

$$Q_m(z;\{F_\gamma^j\}_{j=1}^k) =$$

$$= \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1}z\right\}(1+o(1)). \qquad (0.8)$$

Опираясь на результаты работы [25], легко показать, что при тех же условиях равномерно по z на любом компакте из $\mathbb{C}$

$$\lim_{n+m\to+\infty} P_{n_j}^j(z)\exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1}z\right\} = F_\gamma^j(z). \quad (0.9)$$

Равенства (0.8), (0.9) в совокупности являются одним из первых утверждений об асимптотике многочленов Эрмита – Паде, охватывающих в том числе и недиагональный случай. Вместе с тем, вопрос о том, какова скорость равномерной сходимости дробей $\pi_{n_j,m}^j(z;\vec{F}_\gamma)$ к $F_\gamma^j(z)$, в общей постановке остаётся открытым. Имеющиеся результаты относятся в основном к диагональному случаю, когда $\gamma=1$. Так в [18] с помощью метода матричной задачи Римана – Гильберта найдена скорость такой сходимости при $\gamma=1$, $k=2$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$. В [19] рассмотрен случай, когда $k>1$, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ лежат на мнимой оси (см. также работу [20], где при $\gamma=1$ и $k=2$ исследуются в том числе и недиагональные аппроксимации).

В данной статье для аппроксимаций Эрмита – Паде 2-рода вектор-функции $\vec{F}_\gamma$ доказываются аналоги некоторых теорем из работ [27]–[29], описывающих свойства аппроксимаций Эрмита–Паде 1-го рода вектор-функции $\vec{F}_1$. В частности, на-ходятся асимптотики разностей

$$F_\gamma^j(z) - \pi_{n_j,m}^j(z;\vec{F}_\gamma)$$

(см. § 2–§ 5) для квадратичных (в том числе и недиагональных) аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода в случае набора из двух функций Миттаг – Леффлера $\{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z)\}$ при произвольных различных комплексных $\{\lambda_1,\lambda_2\}$. В недиагональном случае методы, применяемые при изучении диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде (в частности, методы Лапласа и перевала), не работают. Поэтому в работе применяется новый подход, который опирается на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала [26]. Отметим, что до настоящего времени в основном исследовались свойства аппроксимаций Эрмита – Паде 1-го рода вектор-функции $\vec{F}_1$ [27]–[34].

1 Скорость сходимости квадратичных аппроксимации Эрмита – Паде

В этом параграфе будем исследовать скорость сходимости (в том числе и недиагональных) аппроксимаций Эрмита – Паде для набора, состоящего из двух функций Миттаг – Леффлера

$$\{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z)\} = \{{}_1F_1(1,\gamma;\lambda_1 z), {}_1F_1(1,\gamma;\lambda_2 z)\},$$

где λ_1,λ_2 – произвольные различные отличные от нуля комплексные числа. В общем случае рассматриваемая задача может быть сведена к нахождению асимптотики интеграла Лапласа, определяемого равенством (1) в [26, гл. 7, § 43, п. 1], где вместо $\lambda S(x)$ стоит функция $S(x,n,m_1,\dots,m_k)$, зависящая, вообще говоря, от $k+1$ различных параметров. Далее предполагаем наличие не более трёх параметров. В такой ситуации при исследовании асимптотик соответствующих интегралов несколько иначе, чем при обосновании метода Лапласа [26, гл. 7, § 43, п. 1], будем учитывать известный эвристический вывод о том, что основной вклад в асимптотику интеграла Лапласа вносит интеграл по достаточно малой окрестности точки максимума функции $S(x,n,m_1,m_2)$ (можно показать, что при сделанных предположениях формальное применение метода Лапласа также приводит к верному результату). Докажем вначале следующую теорему.

***Теорема* 0.1.** *Пусть* $m_2=n$, $m=n+m_1$, $n_1=2n$, $n_2=n+m_1$, *где* n, m_1 *– произвольные целые неотрицательные числа, а* $\pi_{n_j,m}^j(z;\vec{F}_1)$, $j=1,2$ *– аппроксимации Эрмита – Паде набора из двух экспонент* $\{e^z,e^{2z}\}$. *Тогда для любого комплексного* z *при* $n\to+\infty$

$$e^z - \pi_{2n,n+m_1}^1(z;\vec{F}_1) = = (-1)^m e^z \frac{z^{2n+m_1+1}}{2\cdot(2n+m_1)!} B\left(\frac{m_1+1}{2};n+1\right)\times \times e^{\theta(n,m_1)z}(1+o(1)), \quad (1.1)$$

$$e^{2z} - \pi_{n+m_1,n+m_1}^2(z;\vec{F}_1) = (-1)^m e^{2z}\frac{z^{2n+m_1+1}}{2\cdot(2n+m_1)!}\times \times B\left(\frac{m_1+1}{2};n+1\right)\times \times\left\{e^{\theta(n,m_1)z} + (-1)^{m_1}e^{-\theta(n,m_1)z}\right\}(1+o(1)), \quad (1.2)$$

где $\theta(n,m_1)=\sqrt{m_1/(2n+m_1)}$, *если* $m_1\to+\infty$; $\theta(n,m_1)=\frac{\Gamma((m_1+2)/2)}{\Gamma((m_1+1)/2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$, *если* m_1 *– ограничено*; $B(u;v)$ *– бета-функция Эйлера, а оценка* $o(1)$ *равномерна по всем* $|z|\le L$. *Здесь и далее* $L, L_1,\dots$ *– положительные постоянные.*

Доказательство. В рассматриваемом случае

$$R_{n,m}^1(z;\vec{F}_1) = \frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!}\int_0^1 x^n(x-1)^{m_1}(x-2)^n e^{z(1-x)}dx.$$

В интеграле

$$I_1(z) = \int_0^1 x^n(x-1)^{m_1}(x-2)^n e^{z(1-x)}dx$$

сделаем замену $x=1-u$. В результате получим

$$I_1(z) = (-1)^{n+m_1}\int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} e^{zu}du.$$

Рассмотрим интегралы

$$J_1^j = \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1+j} du, \ j = 0,1,2,....$$

Легко заметить, что

$$J_1^j = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-u^2\right)^n \left(u^2\right)^{\frac{m_1+j-1}{2}} du^2 = = \frac{1}{2} B\left(\frac{m_1+j+1}{2}; n+1\right). \tag{1.3}$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы $J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0.$ Выражая бета-функцию Эйлера через гамма-функции, получим равенство

$$u_0 = \frac{J_1^1}{J_1^0} = \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+2n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+2n+4}{2}\right)}.$$

С помощью формулы Стирлинга нетрудно показать, что при $n \to +\infty$ и $m_1 \to +\infty$

$$u_0 = \sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}\left(1+o(1)\right). \tag{1.4}$$

В случае, когда m_1 – ограничено и $n \to +\infty$,

$$u_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+o(1)\right).$$

Следовательно, при достаточно больших n $u_0 \in (0,1)$. В связи со сказанным вначале этого параграфа, заметим, что $u_0^* = \sqrt{m_1/(2n+m_1)}$ является точкой максимума функции

$$S(u,n,m_1) = \ln\left(u^{m_1}(1-u^2)^n\right), \ u \in (0,1).$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{z(u-u_0)}$ в окрестности точки u_0, получим

$$e^{uz} = e^{u_0 z} e^{z(u-u_0)} =$$

$$= e^{u_0 z}\left\{1 + z(u-u_0) + \frac{z^2}{2}(u-u_0)^2 + ...\right\} =$$

$$= e^{u_0 z} + z(u-u_0)e^{u_0 z} + \rho_u(z),$$

где при $|z| \le L$ и $u \in [0,1]$

$$\left|\rho_u(z)\right| \le \left|u-u_0\right|^2 \left\{\frac{L^2}{2!} + ... + \frac{L^n}{n!} + ...\right\} \le L_1 \left|u-u_0\right|^2.$$

Учитывая выбор u_0 и (1.3), приходим к равенству

$$I_1(z) = (-1)^{n+m_1}\left\{\int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} e^{u_0 z} du + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} \rho_u(z) du\right\} =$$

$$= (-1)^{n+m_1} \frac{e^{u_0 z}}{2} B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) + A_\rho(z), \tag{1.5}$$

где при $|z| \le L$

$$\left|A_\rho(z)\right| \le L_1 \int_0^1 (1-u^2)^n u^n (u^2 - uu_0) du =$$

$$= L_1\left(J_1^2 - u_0 J_1^1\right).$$

С учетом равенств (1.3) и определения u_0, отсюда следует неравенство

$$\left|A_\rho(z)\right| \le \frac{L_1}{2}\left\{\frac{B(\frac{m_1+3}{2}; n+1)}{B(\frac{m_1}{2}+1; n+1)} - \frac{B(\frac{m_1}{2}+1; n+1)}{B(\frac{m_1+1}{2}; n+1)}\right\} \times \times B\left(\frac{m_1}{2}+1; n+1\right). \tag{1.6}$$

Выражая бета-функции через гамма-функции и опираясь на формулу Стирлинга, получаем, что при $n \to +\infty$ и $m_1 \to +\infty$

$$\frac{B(\frac{m_1+3}{2}; n+1)}{B(\frac{m_1}{2}+1; n+1)} \sim \sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}},$$

$$\frac{B(\frac{m_1}{2}+1; n+1)}{B(\frac{m_1+1}{2}; n+1)} \sim \sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}.$$

Если же m_1 ограничено, а $n \to +\infty$, то

$$\frac{B(\frac{m_1+3}{2}; n+1)}{B(\frac{m_1}{2}+1; n+1)} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+2}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\frac{B(\frac{m_1}{2}+1; n+1)}{B(\frac{m_1+1}{2}; n+1)} \sim \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1+1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Поэтому, учитывая (1.5) и (1.6), при $n \to +\infty$ будем иметь

$$I_1(z) = (-1)^{n+m_1} \frac{e^{u_0 z}}{2} B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right)(1+o(1)).$$

Принимая во внимание равенство (1.4), при $n \to +\infty$ и $m_1 \to +\infty$ окончательно получим

$$R_{n,m}^1(z; \overline{F_1}) = (-1)^{n+m_1} \frac{z^{2n+m_1+1}}{2(2n+m_1)!} \times \times B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) e^{\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}} z} (1+o(1)). \tag{1.7}$$

Далее, представим $R_{n,m}^2(z; \vec{F}_1)$ в виде

$$R_{n,m}^2(z; \vec{F}_1) = \frac{e^z z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!} \times$$

$$\times \int_0^1 x^n (x-1)^{m_1} (x-2)^n e^{z(1-x)} dx +$$

$$+ \frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!} \int_1^2 x^n (x-1)^{m_1} (x-2)^n e^{z(2-x)} dx =$$

$$= R_1^2(z) + R_2^2(z).$$

Нетрудно заметить, что $R_1^2(z) = e^z R_{n,m}^1(z; \overline{F_1}).$ В интеграле, определяющем функцию $R_2^2(z)$, сделаем замену $x - 1 = u.$ Тогда

$$R_2^2(z) = (-1)^n \frac{z^{2n+m_1+1}}{(2n+m_1)!} \int_0^1 (1-u^2)^n u^{m_1} e^{z(1-u)} du.$$

С помощью теоремы Тейлора, получим

$$e^{z(1-u)} = e^{z(1-u_0)} e^{z(u_0-u)} =$$

$$= e^{z(1-u_0)}\left\{1 - z(u-u_0) + \frac{z^2}{2}(u-u_0)^2 - ...\right\}.$$

Опираясь на это разложение и рассуждая аналогично как при доказательстве равенства (1.7), получим, что при $n \to +\infty$ и $m_1 \to +\infty$

$$R_2^2(z) = (-1)^n e^z \frac{z^{2n+m_1+1}}{2(2n+m_1)!} \times$$
$$\times B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right) e^{-\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}z}(1+o(1)). \quad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) при $n \to +\infty$ и $m_1 \to +\infty$ следует асимптотическое равенство

$$R_{n,m}^2(z) = (-1)^{n+m_1} e^z \frac{z^{2n+m_1+1}}{2(2n+m_1)!} \times \quad (1.9)$$
$$\times B\left(\frac{m_1+1}{2}; n+1\right)\left\{e^{\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}z} + (-1)^{m_1} e^{-\sqrt{\frac{m_1}{2n+m_1}}z}\right\}(1+o(1)).$$

Остается заметить, что при $n \to +\infty$ и $m_1 \to +\infty$ утверждения теоремы 0.1 являются следствием равенств (1.7), (1.9), если только учесть, что в условиях теоремы равенство (0.8) при $\gamma = 1$ и $n \to +\infty$ имеет вид

$$Q_m(z; \{e^z, e^{2z}\}) = e^{-z}(1+o(1)).$$

Случай, когда m_1 – ограничено, рассматривается аналогично. □

Докажем теперь общее утверждение.

***Теорема* 0.2.** *Пусть n, m_1, m_2 – целые неотрицательные числа, а рациональные дроби $\pi_{n_j,m}^j(z; \vec{F}_\gamma)$, $j = 1, 2$ являются аппроксимациями Эрмита – Паде вектор-функции*

$$\vec{F}_\gamma = \{F_\gamma^1(z), F_\gamma^2(z)\},$$

где λ_1, λ_2 – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m(n)}{\sqrt{n}} = 0,$ то для любого z равномерно по всем m, $0 \le m \le m(n)$, при $n \to +\infty$

$$F_\gamma^1(z) - \pi_{n_1,m}^1(z; \vec{F}_\gamma) = \quad (1.10)$$
$$= (-1)^m \frac{m_1!(\gamma)_n(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\lambda_1^{n+m_1+1}z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m_1+1}}\big(1+o(1)\big),$$

$$F_\gamma^2(z) - \pi_{n_2,m}^2(z; \vec{F}_\gamma) = \quad (1.11)$$
$$= (-1)^m \frac{m_2!(\gamma)_n(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1}\lambda_2^{n+m_2+1}z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m_2+1}}\big(1+o(1)\big),$$

где оценка $o(1)$ равномерна по всем $|z| \le L$.

Доказательство. Докажем (1.10). Для этого найдём асимптотику остаточной функции

$$R_{n,m}^1(z; \vec{F}_\gamma) = \frac{e^{\lambda_1 z} z^{n+m+1}}{\lambda_1^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}} \times$$
$$\times \int_0^{\lambda_1} x^{n+\gamma-1}(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} e^{-zx}dx. \quad (1.12)$$

В интеграле

$$U_1(z) = \int_0^{\lambda_1} x^{n+\gamma-1}(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} e^{z(\lambda_1 - x)}dx$$

сделаем замену $x = \lambda_1 t$. В результате получим

$$U_1(z) = \lambda_1^{n+m_1+1}\int_0^1 t^{n+\gamma-1}(t-1)^{m_1}(\lambda_1 t - \lambda_2)^{m_2} e^{z\lambda_1(1-t)}dt.$$

Перейдем здесь к новой переменной интегрирования $u = 1-t$. Тогда

$$U_1(z) = (-1)^m \lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2 - \lambda_1)^{m_2} \times$$
$$\times \int_0^1 (1-u)^{n+\gamma-1}u^{m_1}\left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2} e^{\lambda_1 z u}du.$$

При $n \to \infty$ найдём асимптотику интегралов

$$J_\gamma^p := \int_0^1 (1-u)^{n+\gamma-1}u^{m_1+p}\left(1 + \frac{\lambda_1 u}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^{m_2}du,$$
$$p = 0, 1, 2, \ldots.$$

Преобразуем подынтегральное выражение в J_γ^0 с помощью формулы бинома Ньютона:

$$J_\gamma^0 = \sum_{l=0}^{m_2} C_{m_2}^l \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)^l B(n+\gamma; m_1 + l + 1).$$

Справедливо равенство

$$B(n+\gamma; m_1+l+1) =$$
$$= \frac{m_1+l}{n+m_1+l+\gamma} \cdot \frac{m_1+l-1}{n+m_1+l+\gamma-1} \cdots \times$$
$$\times \frac{1}{n+\gamma+1} B(n+\gamma; 1).$$

Поэтому

$$J_\gamma^0 = \frac{m_1!\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(n+m_1+\gamma+1)} \times$$
$$\times\left[1 + \sum_{l=1}^{m_2} C_{m_2}^l \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^l \times\right.$$
$$\left.\times \frac{(m_1+1)(m_1+2)\cdots(m_1+l)}{(n+m_1+\gamma+1)\cdots(n+m_1+l+\gamma)}\right].$$

Второе слагаемое в скобках предыдущего равенства при достаточно больших n по модулю не превосходит

$$\sum_{l=1}^{m_2} C_{m_2}^l \left|\frac{\lambda_1 m}{(\lambda_2-\lambda_1)(n+m+\gamma_1)}\right|^l =$$
$$= \left[1 + \frac{|\lambda_1| m}{|\lambda_2 - \lambda_1|(n+m+\gamma_1)}\right]^{m_2} - 1,$$

где $\gamma_1 = \operatorname{Re}\gamma.$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m(n)}{\sqrt{n}} = 0,$ то правая часть последнего соотношения стремится к нулю при $n \to \infty.$ Следовательно

$$J_\gamma^0 = \frac{m_1!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m_1+1}}\big(1+o(1)\big). \quad (1.13)$$

Аналогично показывается, что при $n \to \infty$ и $p = 1, 2, \ldots$

$$J_\gamma^p = \frac{(m_1+p)!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m_1+p+1}}\big(1+o(1)\big). \quad (1.14)$$

Подберем теперь u_0 так, чтобы

$$J_1^1 - u_0 J_1^0 = 0.$$

Тогда при $n \to \infty$

$$u_0=\frac{J_\gamma^1}{J_\gamma^0}=\frac{m_1+1}{n+m_1+\gamma+1}\big(1+o(1)\big). \quad (1.15)$$

Разлагая в ряд Тейлора функцию $e^{\lambda_1(u-u_0)z}$ в окрестности точки u_0, получим

$$e^{\lambda_1 uz}=e^{\lambda_1 u_0 z}e^{\lambda_1(u-u_0)z}=$$
$$=e^{\lambda_1 u_0 z}+\lambda_1 z(u-u_0)e^{\lambda_1 u_0 z}+\rho_u(z),$$

где при $|z|\le L$ и $u\in[0,1]$

$$|\rho_u(z)|\le$$
$$\le L_1|u-u_0|^2\left\{\frac{(|\lambda_1|L)^2}{2!}+\ldots+\frac{(|\lambda_1|L)^n}{n!}+\ldots\right\}\le$$
$$\le L_2(u^2+2u|u_0|+|u_0|^2).$$

Учитывая выбор u_0, равенства (1.12)–(1.15), получим, что при $n\to\infty$

$$U_1(z)=(-1)^m\lambda_1^{n+m_1+\gamma}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\times$$
$$\times\left\{\frac{m_1!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m_1+1}}e^{\frac{\lambda_1(m_1+1)}{n+m_1+\gamma+1}z}\big(1+o(1)\big)+A\rho_u(z)\right\},$$

где при достаточно больших n

$$|A\rho_u(z)|\le$$
$$\le\int_0^1(1-u)^{n+\gamma_1-1}u^{m_1}\left(1+\frac{|\lambda_1|u}{|\lambda_2-\lambda_1|}\right)^{m_2}|\rho_u(z)|\,du\le$$
$$\le L_3\left\{\frac{(m_1+2)!\Gamma(n+\gamma_1)}{\Gamma(n+m_1+\gamma_1+2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{2|u_0|(m_1+1)!\Gamma(n+\gamma_1)}{\Gamma(n+m_1+\gamma_1+1)}+\frac{|u_0|^2m_1!\Gamma(n+\gamma_1)}{\Gamma(n+m_1+\gamma_1)}\right\}.$$

При доказательстве последнего неравенства воспользовались равенствами (1.14), учитывая при этом то, что главные члены асимптотики для интегралов J_γ^p не зависит от λ_1 и λ_2. Из двух последних соотношений и (1.15) окончательно получаем, что при $n\to\infty$

$$U_1(z)=(-1)^m\lambda_1^{n+m_1+\gamma}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}\frac{m_1!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m_1+1}}\big(1+o(1)\big).$$

Отсюда и из равенств (1.12) и (0.9) следует (1.10). Равенство (1.11) доказывается аналогично. □

2 Некоторые замечания и следствия

В равенствах, содержащихся в формулировке следствия 1.2 работы [35] (см. также равенства (6.1) из [27]), в качестве множителя в правых частях стоит б.м. $\sqrt{2\pi/9n}[2/3\sqrt{3}]^n$, которая эквивалентна б.м. $B((n+1)/2;n+1)/2$. Поэтому равенства (1.1) и (1.2) при $m_1=n$ согласуются с равенствами из следствия 1.2 работы [35].

Далее, если в (1.2) положить $m_1=0$ и учесть, что при $n\to\infty$

$$B\left(\frac{1}{2};n+1\right)\sim\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!},$$

то получим

$$e^{2z}-\pi_{n,n}^2(z;e^{2\xi})=$$
$$=(-1)^n\frac{2^{2n+1}(n!)^2e^{2z}}{(2n)!(2n+1)!}z^{2n+1}(1+o(1)).$$

Отсюда и из равенства (0.5) при $\gamma=1$ следует, что $\pi_{n,n}^2(z;\vec{F}_1)=\pi_{n,n}(z;e^{2\xi})$. Поэтому при $m_1=0$ вторая аппроксимация Эрмита – Паде для набора $\{e^z,e^{2z}\}$ совпадает с аппроксимацией Паде для функции e^{2z}. Это вполне согласуется с определениями указанных аппроксимаций.

Далее, по определению $m=m_1+m_2$, где m_1, m_2 – целые неотрицательные числа. Анализируя доказательство теоремы 1.2, нетрудно заметить, что при ограниченности одного из слагаемых m_j одно из утверждений теоремы 1.2 можно усилить. Например, если m_2 – ограничено, то асимптотическое равенство (1.10) справедливо при $n\to+\infty$ равномерно по всем m, $0\le m\le m(n)$, где $m(n)=o(n)$. Более того, есть основания предполагать, что теорема 1.2 справедлива при $m(n)=o(n)$ и в случае, когда величины m_1 и m_2 одновременно являются неограниченными.

В простейшей ситуации получим

Следствие. *Пусть* $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $m=m_1$, $m_2=0$. *Тогда равномерно по всем* m, $0\le m\le m(n)$, *где* $m(n)=o(\sqrt{n})$, *при* $n\to+\infty$

$$F_\gamma^1(z)-\pi_{n,m}^1(z;\vec{F}_\gamma)=$$
$$=(-1)^m\frac{m!(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}z^{n+m+1}\big(1+o(1)\big), \quad (2.1)$$

$$F_\gamma^2(z)-\pi_{n+m,m}^2(z;\vec{F}_\gamma)=$$
$$=\frac{2^{n+1}(\gamma)_n}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}z^{n+m+1}\big(1+o(1)\big). \quad (2.2)$$

Из равенств (2.1) и (0.5) следует, что $\pi_{n,m}^1(z;\vec{F}_\gamma)=\pi_{n,m}(z;F_\gamma^1)$, т. е. при $m_2=0$ первая аппроксимация Эрмита – Паде для набора $\overline{F_\gamma}=\{F_\gamma^1,F_\gamma^2\}$ совпадает с аппроксимацией Паде функции $F_\gamma^1(z)$. При $m(n)=o(n)$ асимптотические равенства (0.5) и (2.1) приводятся к одинаковому виду. Это согласуется с сделанным ранее предположением.

Далее, если через $T_{n+m}(z;F_\gamma^2)$ обозначить многочлен Тейлора порядка $n+m$ для функции $F_\gamma^2(z)$, то

$$F_\gamma^2(z)-T_{n+m}(z;F_\gamma^2)=\frac{2^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m+1}}z^{n+m+1}\big(1+o(1)\big).$$

Из этого равенства и равенства (2.2), в частности, следует, что рациональная дробь $\pi_{n+m,m}^2(z;\vec{F}_\gamma)$ в сравнении с $T_{n+m}(z;F_\gamma^2)$ существенно лучше приближает функцию $F_\gamma^2(z)$, например, при $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,...\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2. *Hermite*, *C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

3. *Mahler*, *K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – P. 118–150.

4. *Бейкер мл.*, *Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М.: Мир, 1986.

5. *Клейн*, *Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987.

6. *Aptekarev*, *A.I.* Asymptotics of Hermite – Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar, E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York – Berlin: Springer-Verlag, 1992.

7. *Аптекарев*, *А.И.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.

8. *Аптекарев*, *А.И.* Аппроксимации Эрмита – Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс / Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 123–190.

9. *Суетин*, *С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

10. *Суетин*, *С.П.* Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, № 5 (425). – С. 121–174.

11. *Аппроксимации Эрмита – Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности* / А.В. Комлов, Р.В. Пальвелев, С.П. Суетин, Е.М. Чирка // Успехи матем. наук. – 2017. – Т. 72, № 4 (436). – С. 95–130.

12. *Van Assche*, *W.* Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W.Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc.– 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.

13. *Буслаев*, *В.И.* О задачах равновесия, связанных с распределением нулей полиномов Эрмита – Паде / В.И. Буслаев, С.П. Суетин // Труды МИАН им. В.А. Стеклова – 2015. – Т. 290. – С. 272–279.

14. *Комлов*, *А.В.* О распределении нулей полиномов Эрмита – Паде / А.В. Комлов, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, № 6 (426). – С. 211–212.

15. *О сходимости квадратичных аппроксимаций Шафера* / А.В. Комлов, Н.Г. Кружилин, Р.В. Пальвелев, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2016. – Т. 71, № 2 (428). – С. 205–206.

16. *Perron*, *O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin: Teubner, 1929.

17. *Аптекарев*, *А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

18. *Type* II *Hermite – Padé approximation to the exponential function* / A.B J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207. – P. 227–244.

19. *Старовойтов*, *А.П.* Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 9. – С. 59–68.

20. *Старовойтов*, *А.П.* Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, № 1 (2). – С. 88–91.

21. *Van Rossum*, H. Systems of orthogonal and quasi-orthogonal polynomials connected with the Padé table I, II and III / H. Van Rossum // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 517–534, 675–682.

22. *De Bruin*, *M.G.* Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1;c;x)$ / M.G. De Bruin // K. Nederl. Akad. Wetensch. – 1976. – Vol. 79. – P. 408–418.

23. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.

24. *Braess*, *D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x, II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

25. *Аптекарев*, *А.И.* Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1;c;\lambda_i z)\}_{i=1}^k$ / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.

26. *Сидоров*, *Ю.В.* Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.

27. *Астафьева*, *А.В.* Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.

28. *Старовойтов*, *А.П.* Асимптотика диагональных многочленов Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов //

Матем. заметки – 2017. – Т. 102, № 2. – С. 302–315.

29. *Старовойтов*, *А.П.* О некоторых свойствах аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко // Труды МИАН им. В. А. Стеклова. – 2017. – Т. 298. – С. 338–355.

30. *Driver*, *K.* Nondiagonal Hermite – Padé approximation to the exponential function / D. Braess // J. of Comput. and Appl. Math. – 1995. – Vol. 65. – P. 125–134.

31. *Wielonsky*, *F.* Asymptotics of Diagonal Hermite – Padé Approximants to e^z / F. Wielonsky // J. Approx. Theory. – 1997. – Vol. 90, № 2. – P. 283–298.

32. *Stahl*, *H.* Asymptotics for quadratic Hermite – Padé polynomals associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.

33. *Kuijlaars*, *A.B.J.* Quadratic Hermite – Padé approximation to the exponential function: a Riemann – Hiebert approach / A.B.J. Kuijlaars, W. Van Assche, F. Wielonsky // Constr. Approx. – 20025. – Vol. 21. – P. 351–412.

34. *Старовойтов*, *А.П.* Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – С. 409–420.

35. *Старовойтов*, *А.П.* Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.

Поступила в редакцию 22.01.18.